

ГЛАВА 5 Вычисление пределов

При вычислении предела функции $y = f(x)$ приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

1. Функция $f(x)$ является элементарной и предельное значение аргумента функции принадлежит её области определения, тогда вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, так как предел элементарной функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, где x_0 входит в область её определения, равен частному значению функции при $x = x_0$, то есть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ не определена, или же вычисляется предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

Тогда вычисление предела требует в каждом случае индивидуального подхода. В одних случаях вопрос сводится непосредственно к применению теорем о пределах, свойствах бесконечно малых и бесконечно больших функций и связи между ними.

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ или при $x \rightarrow \infty$ представляет собой неопределённость типа $\ll \frac{0}{0} \gg$; $\ll \frac{\infty}{\infty} \gg$; $\ll 0 \cdot \infty \gg$; $\ll \infty - \infty \gg$; $\ll 1^\infty \gg$; $\ll 0^0 \gg$; $\ll \infty^0 \gg$.

Решение типовых примеров

Задача 1. Вычислить пределы:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1}$.

Решение. Так как $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5 \neq 0$, то:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1} = \frac{4 + 2 - 2}{4 + 1} = \frac{4}{5}.$$

2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x - 3}{\log_2(x^2 + 1)}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x - 3}{\log_2(x^2 + 1)} = \frac{(-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 3}{\log_2[(-1)^2 + 1]} = \frac{-7}{\log_2 2} = -7$$

3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \right]$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \right] = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -\cos\frac{\pi}{6} \cdot \left(-\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

44. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}.$

Решение. Функция $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$ в точке $x = 2$ не определена. Так как при $x = 2$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то имеем **неопределенность вида** $\frac{0}{0}$. Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было бы сократить на $x - 2$. Для этого разложим числитель и знаменатель на множители:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3), \text{ так как } x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ при } x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1), \text{ так как } x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ при } x_1 = 2, \quad x_2 = 1.$$

Итак, имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3}{x - 1} = \frac{2 - 3}{2 - 1} = -1.$$

5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x + 6}}{x - 3}.$

Решение. При $x = 3$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, следовательно, имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было сократить на $x - 3$. Для этого числитель и знаменатель умножим на выражение, сопряженное иррациональному выражению $3 - \sqrt{x + 6}$, то есть на выражение $3 + \sqrt{x + 6}$, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x + 6}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3 - \sqrt{x + 6})(3 + \sqrt{x + 6})}{(x - 3)(3 + \sqrt{x + 6})} = \{ \text{перемножив сопряженные}$$

выражения, избавимся от иррациональности в числителе} =

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - (x + 6)}{(x - 3)(3 + \sqrt{x + 6})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{(x - 3)(3 + \sqrt{x + 6})} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x - 3)(3 + \sqrt{x + 6})} = -\frac{1}{3 + \sqrt{3 + 6}} = -\frac{1}{3 + 3} = -\frac{1}{6}.$$

6. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x + 6} - 2}{x^2 - 4}.$

Решение.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt{x+6}-2)(\sqrt{x+6}+2)}{(x^2-4)(\sqrt{x+6}+2)} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+6-4}{(x^2-4)(\sqrt{x+6}+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x^2-4)(\sqrt{x+6}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+6}+2)} = \frac{1}{-4(\sqrt{4}+2)} = -\frac{1}{4(2+2)} = -\frac{1}{16}.\end{aligned}$$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}-2}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}-2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x+3-4)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{1+3}+2}{\sqrt{1+1}+\sqrt{2}} = \frac{2+2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+1}{3x^2+2x-1}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3+1) = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2+2x-1) = \infty$$

Следовательно, имеет место неопределенность вида $\langle\langle \frac{\infty}{\infty} \rangle\rangle$. Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на старшую степень дроби, то есть на x^3 , получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+1}{3x^2+2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \infty.$$

Предел знаменателя равен нулю, следовательно, в знаменателе бесконечно малая функция. Далее применили теорему о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами.

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$.

Решение. В заданном примере имеем неопределенность вида $\langle\langle \infty - \infty \rangle\rangle$. Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное ему выражение, то есть на $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$, получим:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - (x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = 0.\end{aligned}$$

Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}) = \infty$, значит в знаменателе бесконечно большая функция. Далее применим теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой величинами.

$$10. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{3-x} - \frac{2}{9-x^2} \right).$$

Решение. Имеем неопределенность вида « $\infty - \infty$ ». Приведем дроби, стоящие под знаком предела, к общему знаменателю, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{3-x} - \frac{2}{9-x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3+x-2}{9-x^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1+x}{9-x^2} = \infty.$$

Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}.$$

Решение. Для вычисления этого предела воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5.\end{aligned}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \sin 2x}{x \cdot x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \\ &= 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \right)^2 = 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} \right)^2 = 8 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 = 8 \cdot 1 = 8 \end{aligned}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{2x}.$$

Решение. В данном примере имеем неопределенность вида « 1^∞ ». Для его вычисления используем второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{\frac{x}{3} \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3}{x} \right)^{\frac{x}{3}} \right]^6 = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{\frac{x}{3}} \right]^6 = e^6.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}.$$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \cos 4x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos 4x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{4x} \cdot \cos 0 = \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}.$$

При вычислении этого предела воспользовались эквивалентностью бесконечно малых $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$. Следовательно, $\sin 3x \sim 3x$ и $\sin 4x \sim 4x$ при $x \rightarrow 0$. Затем бесконечно малые функции в числителе и в знаменателе заменили эквивалентными им функциями.

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5x)^{\frac{1}{x} + 2}.$$

Решение. Имеем неопределенность вида « 1^∞ ». Для вычисления предела используем второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$\begin{aligned} \text{Итак, } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5x)^{\frac{1}{x} + 2} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5x)^{\frac{1}{x}} \cdot (1 - 5x)^2 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5x)^{-\frac{1}{5x} \cdot (-5)} \cdot 1 = \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5x)^{-\frac{1}{5x}} \right]^{-5} = e^{-5}. \end{aligned}$$

Вычислить односторонние пределы:

$$16. \lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} \frac{4}{(x - 2)^3}.$$

Решение. Пусть $x < 2$, тогда при $x \rightarrow 2-0$ функции $x-2$ и $(x-2)^3$ являются отрицательными бесконечно малыми, поэтому $\frac{4}{(x-2)^3}$ – отрицательная бесконечно большая функция. Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{4}{(x-2)^3} = -\infty.$$

При $x > 2$ функции $x-2$ и $(x-2)^3$ – положительные бесконечно малые, поэтому $\frac{4}{(x-2)^3}$ – положительная бесконечно большая функция.

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{4}{(x-2)^3} = +\infty$.

17. $\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}$.

Решение. При $x \rightarrow 1-0$ функция $x-1$ – отрицательная бесконечно малая, следовательно $\frac{1}{x-1}$ – отрицательная бесконечно большая функция.

Тогда $2^{\frac{1}{x-1}}$ – бесконечно малая функция.

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}} = 1.$$

При $x \rightarrow 1+0$ функция $x-1$ – положительная бесконечно малая, следовательно, $\frac{1}{x-1}$ – положительная бесконечно большая функция. Тогда

$2^{\frac{1}{x-1}}$ – бесконечно большая положительная функция. Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}} = 0.$$

Задания для самостоятельного решения

Найти пределы:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 8x - 3}$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$.

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 10}$.
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x + 2}{x + 10^{10}}$.
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x + 1}$.
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5x - 6}{3x^2 + 7x - x^3 - 1}$.
8. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sin 5x}$.
10. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{8-x}}{3x^2 - 8x - 3}$
11. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$.
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x \cdot \operatorname{ctg} 5x$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n} \right)^{n+3}$.
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+4} \right)^{4x+2}$.